მოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

28.04.2012/ მათ/ III/ 290

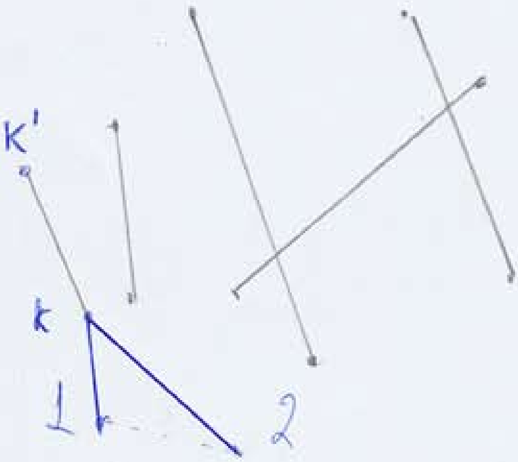
ამოცანა № 1

გვერდი № 1

დამტკიცება ინდუქციით.

(2) დავუშვათ n-თვის, რომ ნებისმიერ* ვ კავშირი, ~~მოიძებნება~~ თუ ადამიანი ერთმანეთს ან ვი-ლაცის მეშვეობით ან პირდაპირ ელაპარაკება. და ჩვენ შეგვიძლია $\frac{n}{2}$ ოთახში მოვათავ-სოთ თი-თო კაცი ისე რომ ერთმანეთს ელა-პარაკებოდეს.

(3) დამტკიცება n+2-თვის.



~~ავიღოთ~~ დავაკავშიროთ 1 და 2 წერტილები (კაცები). [მონიშნული ნიშნავს იმას რომ ისინი პირდაპირ ლაპარაკობენ და ამ შემთხვევაში ერთ ოთახ-ში არიან]. თუ 1 და 2 ლაპარაკობენ, მაშინ მორჩა ამოცანა. აქედან გამო-მდინარე 1 და 2 ვიღაცის მეშვეობით ლაპარაკობენ და ვუწოდოთ K.

2) → განვ. 2-1-4, ... 1 ... ან 1-4 ან 2-4. და თუ შემთხვევაში ...

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

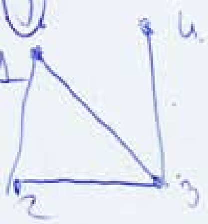
28.04.2012/ მათ/ III/ 290

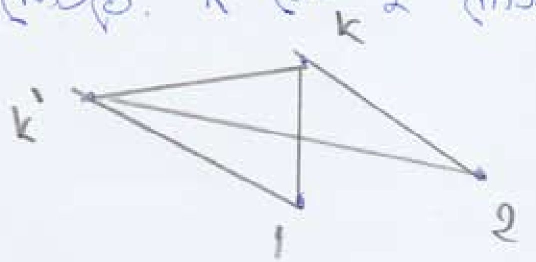
ამოცანა № 1

გვერდი № 2

განვიხილოთ KL-თან ერთად ოთახში მჯდომი K'1 აუცილებლად. K' და 1 ლაპარაკობენ და K' და 2

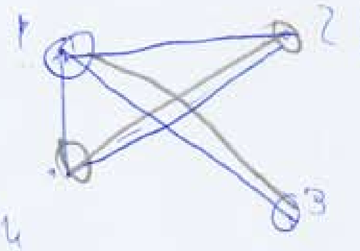
ნახ③





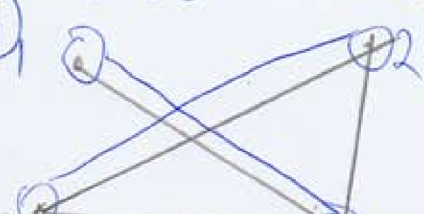
დავწეროთ ძველი წყვილები გარდა K-K'-ს და დავუმატოთ 1K' და 2-K, სადაც ჯამში $\frac{n+2}{2}$ მონაწილე გვაქვს

ნახ②



(1). დამტკიცება 4-თვის.

ნახ.①



ავიღოთ 1 წყვილი, იქიდან აუცილებლად ვამოწმოთ მონაწილე. ზოგ. შემთხ. ეყოს 3.

1. თუ ①-დან გამოდის 1 ცალი. მონაწილეები, მაშინ (ნახ. 1) გარდა სხვა ამო. არაა (ანუ ერთი ...)
2. თუ ①-დან გამოდის 3 ~~...~~ მონაწილეები მაშინ ~~(ნახ. 1)~~ გამოდის რომ 2 და 4 ლაპარაკობენ ანუ ერთი ...
3. თუ ①-დან გამოდის 2 მონაწილე, 4-3-2 დან 1) თუ 2-4, მონაწილე ამოიხსნა ... მაშინ 2-3 ...
2) თუ 3-4 ... ~~...~~

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

28.04.2012/ მათ/ III/ 290

ამოცანა № 3

გვერდი № 1.

მთლიანი ერთი დასამტკიცებელი გავყოთ 2 ნაწილად (ან პუნქტად).

ა) თუ მიმდევრობაში მოიძებნება რიცხვის სრული კვადრატი, მაშინ მიმდევრობაში უსასრულოდ ბევრი რიცხვის კვადრატი იქნება (აუცილებლად)

ბ) მიმდევრობაში აუცილებლად მოიძებნება რიცხვის კვადრატი.

თუ ჩვენ დავამტკიცებთ პუნქტებს ა) და ბ), მაშინ ამოცანა დამტკიცებულია.

პუნქტი ბ)-ს დამტკიცება

ნებისმიერი რიცხვი წარმოიდგინება ასეთი სახით:

$$x^2+k \quad \text{სადაც} \quad 0 \leq k \leq 2x+1 \quad \vee$$

(აქ საუბარია ნატურალურ რიცხვებზე).

x^2+k სახის რიცხვების (რომელიც აუცილებლად არის მიმდევრობაში) საშუალებით, მიმდევრობაში აუცილებლად გაჩნდება რიცხვის კვადრატი.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №	28.04.2012/ მათ/ III/ 290

ამოცანა № 3 გვერდი № 2.

დამტკიცება ინდუქციით.

(1) (ჩვენ ვიხილავთ ისეთ x^2+k-სახის რიცხვებს, რომლებიც არ არიან სრული კვადრატები) შევამოწმოთ 1-თვის და 2-თვის:

თუ: $a_i = x^2+1 \Rightarrow$ $a_{i+1} = x^2+1+[\sqrt{x^2+1}] = x^2+x+1.$ $(x^2 < x^2+1 < (x+1)^2;\ x\neq 0)$

$a_{i+2} = x^2+x+1+[\sqrt{x^2+x+1}] = x^2+x+1+x = (x+1)^2.$ $(x^2 < x^2+x+1 < (x+1)^2\ \ x\neq 0)$

თუ: $a_j = x^2+2 \Rightarrow$ $a_{j+1} = x^2+2+[\sqrt{x^2+2}]$ $(x^2 < x^2+2 < x^2+2x+1)$

$a_{j+1} = x^2+2+x$

$a_{j+2} = x^2+2+x+[\sqrt{x^2+x+2}] = x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$ $(x^2 < x^2+x+2 < x^2+2x+1)$

$a_{j+3} = (x+1)^2+1+[\sqrt{(x+1)^2+1}] = (x+1)^2+(x+1)+1$ $((x+1)^2 < (x+1)^2+1 < (x+2)^2)$

$a_{j+4} = (x+1)^2+(x+1)+1+[\sqrt{(x+1)^2+(x+1)+1}] = (x+1)^2+2(x+1)+1 = (x+2)^2.$ $((x+1)^2 \leq (x+1)^2+(x+1)+1 \leq (x+2)^2)$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

28.04.2012/ მათ/ III/ 290

ამოცანა № 3

გვერდი № 3

(2) დავუშვათ k-თვის და k-მდე. (ნებისმიერი x-თვის) რომ x^2+k თუ არის მიმდევრობაში, მაშინ რიცხვის კვადრატიც მოიძებნება.

(3) დავამტკიცოთ $k+1$-თვის.

$a_m = x^2 + (k+1) \qquad k+1 < 2x+1, \quad k < 2x$

$a_{m+1} = x^2 + (k+1) + [\sqrt{x^2+k+1}] \quad (x^2 < x^2+k+1 < (x+1)^2)$

$a_{m+1} = x^2 + x + (k+1) = (x+1)^2 + (k-x)$

$a_{m+2} = x^2 + x + (k+1) + [\sqrt{(x+1)^2+(k-x)}]$

განვიხილოთ ორი ვარიანტი, როდესაც

1) $\underbrace{k-x<0 \Rightarrow 2x>x>k>0}_{\Downarrow}$ $\qquad \sqrt{(x+1)^2+(k-x)} > x$

$\sqrt{(x+1)^2+(k-x)} < x+1$

$a_{m+2} = x^2+x+(k+1)+x = x^2+2x+(k+1) = (x+1)^2+k$

$(x+1)^2+k$ – (2)-დან გამომდინარე დამტკიცებულია

2) $k-x \geq 0 \Rightarrow 2x > k \geq x > 0.$

$a_{m+2} = x^2+x+(k+1)+(x+1) = (x+1)^2+(k+1).$

$k+1 < 2x+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{m+3} = (x+1)^2 + (k+1) + (x+1) = (x+2)^2 + (k-(x+1)).$

განვიხილოთ 2 ვარიანტი.

1) $k-(x+1)<0 \quad x+1>k.$

$$a_{m+4} = (x+2)^2 + (k-\cancel{x}-1) + \left[\sqrt{(x+2)^2+(k-x-1)}\right] =$$
$$=(x+2)^2+(k-x-1)+x+1=(x+2)^2+k.$$

$(x+2)^2+k$ - (2)-დან გამომდინარე დამტკიცებულია.

2) $k-x-1 \geq 0 \quad k \geq x+1$

$$a_{m+3}=(x+1)^2+(k+1)+(x+1)$$
$$a_{m+4}=(x+2)^2+(k-x-1)+\left[\sqrt{(x+2)^2+(k-x-1)}\right]=$$
$$=(x+2)^2+(k-x-1)+x+2=$$
$$=(x+2)^2+(k+1)=(x+2)^2+(k+1).$$

$$k+1<2x+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{m+5}=(x+2)^2+(k+1)+\left[\sqrt{(x+2)^2+(k+1)}\right]=$$
$$=(x+2)^2+(k+1)+x+2=(x+3)^2+(k-x-2)$$

განვიხილოთ ორი შემთხვევა

1) $-(x+2)+k<0$

2) $-(x+2)+k>0$

და ყველაფერს გავიმეორებთ ანალოგიურად როგორც ზემოთ. ვაჩვენებ რომ საბოლოოდ რომელიღაც S-თვის $k-x-5<0$ და მოიძებნება მოიძებნება სრული კვადრატი თუ (ეს იმიტომ მოხდება რომ k განსაზღვრულია, ხოლო ყოველ ჯერზე [illegible] იზრდება და ერთხელაც [illegible]

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №	28.04.2012/ მათ/ III/ 290

ამოცანა № 3   გვერდი № 5

პუნქტი ა)-ს დამტკიცება

დავუშვათ: $a_p = q^2$.

$a_{p+1} = q^2 + [\sqrt{q^2}] = q^2 + q$

$a_{p+2} = q^2 + q + [\sqrt{q^2+q}] = q^2 + 2q$.

$a_{p+3} = q^2 + 2q + [\sqrt{q^2+2q}] = q^2 + 3q$.

$a_{p+1} = q^2 + q \qquad q < 2q+1$

(2) დან გამომდინარე დამტკიცებულია.

ალბათ რ.დ.გ.